685. 數學ノ新基礎付ケニツイテ

内田　良道（淡水中學）

第一章

〔「實數ハ非可附番集合ヲ作ル」ト云フ Cantor 證明法ニ對スル疑義ニツキテ並ニ Cantor 證明法ノ意味スル処ニツキテ。〕

Cantor証明法が不都合ナリト云ヘバ時代錯誤モ甚ダシイトイフ御叱リヲ受ケタコトモアリマスが。Cantor証明法及ビソレが正シト云ハレル方々ノ御意見ヲ充分考ヘマシタが理解出来兼ネル点がアリマス。

尚Cantor証明法ノ不充分ナコトハSkolemナドモ指摘シテ居ルコトデスシ、種々考ヘタ結果次ノヤウニ述ベタラ宜敷カラウト考ヘマシタ。事柄ハ甚ダ簡単ナコトデスカラ理論ノ正否ハ直チニ明瞭ニナルト見ハレマスカラ御一読ノ上理論ノ欠陥アレバ御教示ヲ願ヘレバ幸デス。

1. Cantor証明法ハ次ナリ。（Hobson：実変数函数論第一巻82頁）

「今(0,1)間ノ実数が

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = 0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\cdots \\ w_2 = 0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_n = 0.\ a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ト可附番集合ヲ作リシトセヨ。

然ラバ $a_{ii} \neq p_{ii}$ $(i=1,2,3,4,\cdots\cdots)$ ヲ満足スル $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \cdots\cdots$ ヲ取リ（但シ $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \cdots\cdots$ ハ皆 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, 9$ マデノ中ノ何レカノ数ヲ表ハストス）コレヨリ

$$\omega = 0.\ p_{11}\ p_{22}\ p_{33}\ \cdots\cdots \qquad (2)$$

ヲ作レバ ω ハ1ツノ実数ニシテ $(0,1)$ ノ間ニアリ、且ツ

(1)ノ何レトモ一致セズ、故ニ實數ハ可附番集合ヲ作リ得ザルモノナリ」

ト主張スルナリ。

問題ノ要点ハ「ωハ果シテ數ナリヤ」ニアリ。今之レヲ考究スルニ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ------- ハ何ヲ意味スルヤト云フニ「具体的ニハ何ナルヤ不明ナルガ、実数全体ガ兎ニ角 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, -------ト並ベ得タトセヨ」ト云フ意ニシテ「具体的ニ $\omega_1=\sqrt{2}-1$, $\omega_2=\sqrt{3}-1$, -------等ト並ベ得タ」モノナラズ。故ニ

$$\omega_1 = 0.\,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \text{-------}$$

ト書キシ意味ハ「モシ $\omega_1=\sqrt{2}-1$ ナレバ $a_{11}=4, a_{12}=1$, ···-----」又「若シ ω_1 ガ $\sqrt{3}-1$ ナレバ $a_{11}=7$, $a_{12}=3$, ---------ニナル」云々トイフ意味ニシテ, ω_1ガ「具体的ニ吾人ニ知ラレシトキハ必ズ無限小数ニヨリテ表ハシ得ル」ト云フニ過ギズ。

ω_1, ω_2, ------- ガ上ノ如キ意味ニ過ギザル故、従ッテ各 a_{11}, a_{22}, a_{33}, -------等ハ「ω_1, ω_2, ------- ガ具体的ニ定マレバ夫々確定スル」ト云フ意味ナリ。従ッテ各 p_{11}, p_{22}, p_{33}, ------- モ結局ハ「0, 1, 2, -------, 9」マデノ何レカノ者トナルト云フニ過ギズ。

論ヨリ証據「p_{11} ハ何ト確定スルヤ」ト聞カレタルトキハ「1, 2, 3, -------, 9」ノ何レカナリト答フルヨリ致シ方ナシ、即チカヽル意味デノ確定ナリ。斯ク考フレバ p_{11}, p_{22}, p_{33}, ------- ハ眞ノ意味ノ確定セルモノナラズ。然ラバ斯カル p_{11},

p_{22}, p_{33}, ------ ヲ用ヒテ作レル

$$0.\,p_{11}\ p_{22}\ p_{33}\ \cdots\cdots$$

ガ級数ヲ作ルト考ヘ得ラルヽカト云フニ然ラズ。$0.\,p_{11}, p_{22}$ ------- ガ級数ヲ作ルタメニハ各 p_{11}, p_{22}, ------ ハ *wohl bestimmte Zahl* ナルコトガ必要ナリ（級数ノ定義）。上ノ場合ハコノ條件ヲ満足セザル故不可ナリ。（尚、カヽル場合ニ $0.\,p_{11}\ p_{22}\ p_{33}$ ------ ガ数ヲ表ハストスレバ循環論ニナルコトハ容易ニ証明シ得!!）。

又假リニ $0.\,p_{11}\ p_{22}\ p_{33}$ ------ ガ級数ヲ作ルトシテモ p_{11}, p_{22}, p_{33}, ------ ガ不明ナレバ $S_n = 0.\,p_{11}\,p_{22} \cdots\cdots p_{nn}$ ガ不明ニシテ從テ收斂條件

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

ハ意味ヲナサヌナリ!!

借テ $0.\,p_{11}\ p_{22}\ p_{33}$ ------ ハ級数ヲ作ラヌナラ、コレガ数ヲ定メルト云フノハ何ヲ根據トスルカ。ムシロ数ヲ定メヌト考ヘル方ガ正当ナリ（今迄ノ数ノ處デハ）。即チ ω ハ数ナラズ、故ニ ω ガ実数中ニアリ又ハ無シト云フコトハ意味ナシ。

從ツテ Cantor ノ断定ハ不都合ナリ、Cantor 証明ハ排中律ノ濫用ニテ排中律ノ成立スル場合デモ不當ナル結論ナリ。（ト云ヘバ吾人ハ如何ニモ排中律ヲ絶体ニ否定スルヤうデスガ然ラズ。吾人ガ排中律ヲ使用スルト危険ダト云フノハ「現在ノ数組織ヲ以テシテハ排中律ハ使用出来ヌト云フナリ。」　コノ意味ニテ Brouwer ノ理論ハ正シト考ヘテ

居リマス。

然シ実際ハ排中律ハ必要ト考ヘラレル故、吾人ハ数ノ組織(超限数ノ)ヲ変ジテ排中律ヲ使用シウルコトヲ示サントスルナリ。絶体ノ否定ハセズ、其ノ方法ヲ以テスレバ使用シ得ルコトヲ主張スルモノナリ、一言附加シテ置キマス)。

(注意1)

上ヨリ考ヘテ実数ガ $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots$ ト可附番集合ヲ作ッタトシテモ(各 $\omega_i\ (i=1,2,\cdots\cdots)$ ガ吾人ニヨリ確定セシメラレズトキニハ)何等ノ不都合ナキコトヲ知リウ。

唯吾人ノ力ニヨリ明確ニ $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-1, \cdots\cdots\cdots$ 等ト並ベエラレザルコトハ確カナリ。(即本質的ニ可番集合ヲ作ルトモ具体的ニ並ベ立テルコトハ実行上ハ不可能ナリ。)

(注意2)

Cantor ノ証明法ニハ欠陥アリト考ヘラレマスガ然シ Cantor ノ証明法カラハ次ノ重要ナ決論ガ出マス。

若シ無理数ガ(実数ト無理数トハ同ジ濃度ナル故実数ノ可附番性ヲ証スルニハ無理数ガ可附番集合ヲ作ルコトヲ証セバ可ナリ。)可番集合ヲ作ルトシテモ「各無理数 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots\cdots$ ニハ明瞭ニ定ッタ有理数 $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots$ ガ夫々(1.1)對應スルコトヲ示スコトハ不可能ナリ(之レハ常ニ要求セラルルコトデ、斯カル証明ヲナサザレバ不可ナリト要求サレマシタ)。

何トナレバ「モシ各 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots\cdots$ ニ対シ夫々明瞭ニ定マッタ有理数 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots$ ガ(1.1)對應スルコト

ヲ証スルニハ、無理数ノ全集合中ヨリ指定サレタ有理数 a_1, a_2, ------- ニ対シ夫々対応者 β_1, β_2, ------- ガ選出シ得ラルルコトヲ示サザルベカラズ。」

コノコトハ結局「吾人ノ力ニヨリ各 a_1, a_2, ------- ニ対スル β_1, β_2, ------- ガ具体的ニ選出シ得ルコトヲ示スコトナリ」。結局ニ於テ吾人ノ力ニヨリテ無理数ヲ例ヘバ $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$, ------- 等ト並ベ得ン事トナリ。（注意１及ビ３）ニヨリ不可能ナル故ナリ。

故ニ無理数ガ可附番集合ヲ作ルコトヲ証スルニハ（実数ノ時モ同ジナリ）。

(i) 各 β_i ノ對者 a_i ハ對應ノ各階段ニ於テ変動スルコトヲ要スルナリ。但シ各対應ノ各階段ニ於テハ必ズ各 β_i ニ対シ夫々一定ノ有理数 a_i ガ対シ、極限ニ於テモ必ズ或ル有理数 $\overline{a_i}$ ガ對スルモノナルコトヲ示サザル可ラズ。

(ii) 又ハ間接ノ証明法ヲ取ラザルベカラズ、即チ各 β_i ニハ夫々一定ノ有理数 a_i ガ対スルト云フ形式ヲ取ラズニ「或ル可附番集合ト無理数ノ集合トガ(1.1)對應ヲナスベキモノ」ナルコトヲ示スヨリ致シ方ナシ。

(i)ハ次章ノ定理２ノ証明形式ニテ (ii)ハ次章ノ定理１ノ証明形式ナリ。

コノ注意ヲ providing 次ノ定理１及定理２ヲ証セン。

（注意３）尚此処ニテ次ノ注意ヲナシ置クハ必要ト思ハレマス。

(1) モシ実数ガ実際非可附番集合ヲ作ルモノナラ ω_1, ω_2,

-----ト並ベ上ゲラレナイモノナル故。ω_1, ω_2, -----ト並ベ上ゲタト考フルノハ一ツノ假定ナル故各ω_1, ω_2, -------ハ全ク不明ノモノナリ。從ッテ各p_{11}, p_{22}, -------ハ不定トナリ其ノ結果 $0 \cdot p_{11}\, p_{22}\, p_{33}$ -------ハ数ヲ定メヌコトトナリ Cantor 証明法ハ成立セヌナリ。

(ロ) モシ又、実数ガ実際可附番集合ヲ作ルモノナラ ω_1, ω_2, -------ト並ベ上ゲラレテ定シキモノ故 $0 \cdot p_{11}\, p_{22}\, p_{33}$ ------ガ数トナルコトハ有リ得ザルナリ（コレガ数トナレバωガ数トナリ、ω_1, ω_2, ------中ニナキ数ωガアルコトトナリ、実数ガ ω_1, ω_2, -------ト並ベシルコトガ出来ナクナル故ナリ）。

即チコノ時モ <u>ω_1, ω_2, -------ハ吾人ニハ全然知リ得ヌモノナリ!!</u>

コレ（注意2）ノ所論ト一致ス。且ッ Cantor 証明ハ成立セヌナリ。

結局、実数ガ非可附番集合ヲ作ルモ亦ハ可附番集合ヲ作ルトシテモ、何レニシテモ Cantor 証明法ハ失敗トナルナリ。

第二章

コノ章ニテハ（0,1）間ノ実数ハ可附番集合ヲ作ルモノナルコトヲ証セントス。二ツノ証明法ヲ与フ。（他ニモマダ証明法ハアリ）

（定理 1）

（0,1）間ノ實數ハ可附番集合ヲ作ル。

（証明）

Dedekind ニヨレバ無理数ハ有理数解ノ切断ニヨリ定義シウルナリ。即チ β ヲ一ツノ無理数トスレバ

$$\beta=(A/B) \quad\text{-------------------------}(1)$$

トシテ定メウルナリ。

但シ A, B ハ共ニ有理数ノミヨリナル集合ニシテ A ニハ最大者ナク、B ニハ最小者ナシ。

逆ニ A（又ハ B）ヲ与フレバ β ハ確定スル故、無理数ノ集合ハ A ノ作ル集合ト（1.1）対応ヲナスベシ。故ニ無理数ノ集合 N ガ可附番ナルコトヲ証スルニハ A ノ作ル集合ガ可附番ナルコトヲ示セバ可ナリ。次ニ帰謬法ヲ用ヒテ証セン。

今 N ガ非可附番集合ヲ作ルトセヨ。然ラバ A ノ作ル集合 Q モ亦非可附番集合ヲ作ルナリ。

然ルニ A ノ作ル集合ハ（0.1）間ノ有理数ヲ大サノ順其ノマヽニテ数ヘ上ゲテ作リシ集合 P ト同濃度又ハコレ以下ノ濃度ナリ。

「∵ 有理数ヲ大サノ順ニ数ヘ上ゲルコトハ各 A ノ元素ヲ一ツ一ツ数ヘ上ゲスコトトナリ、明カニ各 A ヲ一単位ト考ヘテ作リシ集合 Q ヨリ（即チ $Q=(A_1, A_2, A_3, \text{-------})$ ナリ）小ナル濃度トナルコト能ハズ、故ニ P ハ Q ヨリ大カ又ハ同濃度ノモノナリ。」

故ニ P ハ又非可附番集合ヲ作ルナリ。

然ルニ一方ヨリ考フレバ P ハ有理数ノミヲ元素トスル集合ナル故、明カニ可附番集合ヲ作ル。之レ上述ノコトト矛盾

ス。之レ即チNガ非可附番集合ヲ作ルコトノ不可ナルコトヲ示スナリ。即チ全無理数ヨリ作ラレシ集合Nハ可附番集合ヲ作ルベシ。 Q.E.D.

(注意1)

勿論有理数ヲ大サノ順ソノマゝニテ数ヘ上ゲルコトハ実行ハ不可能ナルガ、假リニ有理数ヲ大サノ順其ノマゝニシテ数ヘ上ゲタトキニハ可附番集合ト考フベキカ又ハ非可附番集合ト考フベキカト質問サレシトキハ如何ニ答フベキカ。コノトキハ「可附番集合ヲ作ルト考フベキナリ」ト答フルヨリ致シ方ナカルベシ。

何トナレバ有理数ハ可附番集合ヲ作ルモノナリ。然ラバ之レヲ如何ナル順ニ数ヘ上ゲテモ常ニ可附番集合ヲ作ルベキモノナリ(集合論ノ基本定理!!)。故ニ上ノ如キ結果トナルナリ。

同一ノ集合ガ数ヘ方ニヨリ可附番集合トナリタリ、非可附番集合トナルトセバ何モ可附番集合ト非可附番集合ハ性質ノ全然異ナルモノナリト云フ必要ハ認メラレザルナリ。

(注意2)

無理数ガ可附番集合ヲ作ルト云ヘバ「可附番集合ハ自然数ト(1.1)對應ヲナスモノナル故無理数ガ可附番集合ヲ作ルトイフナラ、自然数ト(1.1)對應ヲナスコトヲ示セ」ト云フ要求アルヤモ知レズ。之レノ答ハ次ナリ。

間接証明法ヲ用ヒテ何故不可ナルヤ。何ンデモ皆直接証

明法ヲ取ル必要ハナキ答ナリ。証明ノナシ易キ方法ニテ証明シテ充分ト考フ。

特ニコノ場合ニハ『無理数ガ「タトイ可附番集合ヲ作ルトモ」吾人ノ力ニテ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots\cdots$ ト並ベ上ゲルコトハ不可ナルコトハ第一章ノ（注意 2,3）中ニ述ベオケル答ナリ。』

従ツテ直接ニカヽルコトヲ証スルハ困難ニテ、カヽル証明ヲ用フル必要ナキト思惟スルガ、是非必要トノコトナレバ次ノ如クシテ証明セン。（第一章注意2参照）

（定理2）

（0,1）間ノ無理数ハ、モシ「$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots \longrightarrow \Omega$ 又ハ $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots \longrightarrow \omega$ ヲ假定スレバ」可附番集合ヲ作ル。

（証明）　Nヲ全無理数ノ集合，Rヲ有理数ノ集合トス。

（0,1）間ノ任意ノ無理数 β_i ハ常ニ無限小数ニテ表ハシ得、且ツ唯一種ノ方法アルノミナルコトハ吾人周知ノコトナリ。コレヲ基礎トシテ理論ヲ進メン。

今、$0.b_{i1}\,b_{i2}\,b_{i3}\cdots\cdots \longrightarrow \beta_i$ ナリシトセヨ。

コノトキ便宜上、コレヲ

$$(b_{ik})_{k\to\omega} \longrightarrow \beta_i \quad \text{------------------} (1)$$

ト表ハスコトトス。

吾人ハ次ノ規則ヲ定メ、有理数ト無理数トヲ対應セシム。

（I）　β_i ニハ有理数 b_{i1} ヲ對サシム。（即チ $0.b_{i1}$ ヲ β_i ニ對スルナリ.）

(II) 若シ上ノ方法ニテ b_{i1} ガ既ニ他ノ無理数 β_1 ニ對應セシメラレシ後ナレバ（又ハ b_{i1} ヲ β_1 ニ對スル必要アリシ時ニハ）新ニ b_{i2} ヲシテ β_i ニ對サシム。（即 $0.b_{i1}b_{i2}$ ヲシテ β_i ニ対サシムルナリ）。

(III) 若シ上ノ方法ニテ $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \cdots\cdots, b_{ik}$ 迄ガ既ニ他ノ無理数 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_k$ ニ対應セシメラレシ後ナレバ（又ハ新ニカクスル必要アルナレバ）新ニ $b_{i(k+1)}$ ヲシテ β_i ニ對サシム。（即チ $0.b_{i1}\cdots\cdots b_{ik}\,b_{i(k+1)}$ ヲシテ β_i ニ対サスナリ）

(IV) モシ $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \cdots\cdots$ ノスベテガ他ノ無理数群（$\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$）ニ對應セシメラレシ後ナレバ（又ハ新ニカク對應セシメル必要アリシトキハ）1ツヅツ摺（ズラ）シテ β_i ニハ b_{i1} ヲ対セシメ（$\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$）ニハ夫々 $b_{i2}, b_{i3}, \cdots\cdots$ ヲ對應セシム。（即チ β_i ニハ $0.b_{i1}$ ヲ β_1 ニハ $0.b_{i1}b_{i2}$, β_2 ニハ $0.b_{i1}b_{i2}b_{i3}, \cdots\cdots$ 以下同様ニ對サシムルナリ）

即チ
$$\left.\begin{array}{ccccc}\beta_i, & \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{i1}, & b_{i2}, & b_{i3}, & b_{i4}, & \cdots\cdots\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

ト對サシム。（但シ b_{il} ハ $0.b_{i1}b_{i2}\cdots\cdots b_{il}$ ノコトナリ、以下同様トス）。

今、上ノ方法ニヨリテ $N_1 = (\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots)$ ナル一群ノ無理数ニ対シ夫々一群ノ有理数群 $(a_1, a_2, \cdots\cdots)$ ガ對セシトセヨ。

次ニ $n_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots\cdots)$ 且ツ $(\beta_{1k})_{k\to\omega} \to \beta$ ナル他ノ一群ノ無理數群ヲ附加スルモ有理數ノ集合 $(c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots)$ ヲ適當ニ取ルコトニヨリ、$N_1 + n_1 = (\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_{11}, \beta_{12}, \cdots\cdots)$ ナル無理數群ノ各元素 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots\cdots)$ 及ビ $(\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots\cdots)$ ト $(c_1, c_2, c_3, c_4, \cdots\cdots)$ トヲシテ (1.1) 對應ヲナサシメウルナリ。其ノ證明次ノ如シ。(コレヲ規則(V)トス)

(證明)

今無理數ノ集合ヲNトス。Nノ部分集合 N_1 迄ハ有理數ト (1.1) 對應ヲナセシトセヨ。即チ

$$\left.\begin{array}{cccc} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (3)$$

ナリシトセヨ。次ニ $n_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots\cdots,)$ (ω-type ノモノデ $(\beta_{1i}) \longrightarrow \beta$ トス) ヲ附加スルト (I), (II), (III), (IV) ニヨリ

$$\left.\begin{array}{cccccc} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \cdots\cdots & \beta_{11}, & \beta_{12}, \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{11} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \downarrow & \downarrow \\ \bar{a}_1, & \bar{a}_2, & \bar{a}_3, & \cdots\cdots & \bar{\bar{a}}_1, & \bar{\bar{a}}_2, \cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots (4)$$

ト對サシメ得。

∵ β_1 ハ初メ a_1 ニ對セシガ n_1 ノ導入ニヨリ (I), (II), (III), (IV) ノ規則ニ從ッテ順次ニ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\cdots$ ニ對セシトセバ sequence (a_{1i}) ハ單調増加數列ナル故ニ

ツノ極限 $\overline{a}_1$ ヲ決定ス。コノトキ「n_1 ノ導入ニヨリ β_1 ハ $\overline{a}_1$ ニ対スルモノ」ト定ム。β_2, β_3, ------- 等ニ對シテモ同様ノコトが成立スル故 (4) ヲ得ルナリ」

次ニ (4) ノ ($\overline{a}_1, \overline{a}_2$, -------), ($\overline{\overline{a}}_1, \overline{\overline{a}}_2$, -------) ノ中ニハ同ジモノモアリ、又無理数トナルモノモアルベシ。但シ無理数ノトキハ皆同一ノ無理数 β トナレルナリ・他ノ無理数ノ起ルコトナシ。コノトキ二ツノ場合 (a), (b) ニ分チテ考フ。

(a) 無理数 β ノ表ハレシ場合ヲトルトス。

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{コノ時} & \beta \text{ ニ対スル無理数群ヲ} & (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3, \cdots\cdots) \\
\text{同ジ} & \overline{a}_1 \text{ ニ対スル} \quad 〃 & (\overline{\beta}_{11}, \overline{\beta}_{12}, \cdots\cdots\cdots) \\
\text{同ジ} & \overline{a}_2 \text{ ニ対スル} \quad 〃 & (\overline{\beta}_{21}, \overline{\beta}_{22}, \cdots\cdots\cdots) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}
\right\} \quad (5)
$$

トセヨ。

斯ク β 及ビ $\overline{a}_1, \overline{a}_2$, ------- ニ對スルモノが多数アリシトセヨ。

又 $0.b_1 b_2 b_3$ ------- $\longrightarrow \beta$ ナリシトセヨ。

然ラバ凡テノ ($\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2$, -------), ($\overline{\beta}_{11}, \overline{\beta}_{12}$, -------), ($\overline{\beta}_{21}, \overline{\beta}_{22}$, -------), -------

ヲシテ ($\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$, ------- $\overline{\overline{a}}_1, \overline{\overline{a}}_2$, ------, $0.b_1, 0.b_1 b_2$, $0.b_1 b_2 b_3$, -------) = (1.1) 對應ヲナサシメ得。

($\because$ n_1 ノ元素ノタメ移動スル数ノ個数ハ最大限可附番集合ヲ作ルノミナル故ナリ)。

斯クシテ N_1 及ビ n_1 ノ凡テノ元素及ビ β ヲシテ夫々相異ナル一ツノ且ツ唯一ツノ有理数 (e_1, e_2, e_3, -------)

ニ對サシメ得。

即チ (a)ノ場合ニハアル極近無理數群ト有理數トガ(1.1)對應ヲナセルトキニハ、コレニ可附番個ノ無理數ヲ附加スルモ常ニ有理數ト(1.1)對應ヲナサシメウルナリ。

b) 無理數ノ表ハレザル場合

コノ時ニモ ($\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots\cdots, \bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \cdots\cdots$) ノ中ニハ同ジモノアルナリ。

次ニ $0.d_1d_2d_3 \cdots\cdots \longrightarrow \bar{a}_i$ トセヨ。

今、$\bar{a}_1$ ヲ極限トスルモノガ (イ)無數ニアル時ニテモ、(ロ)有限個アルノミナル時ニテモ常ニ次ノ如クシテ有理數ト(1.1)對應ヲナサシメ得：

即チ

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{同ジ } \bar{a}_1 & \text{ニ對スル} & \text{無理數群ヲ} & (\beta'_{11}, \beta'_{12}, \cdots\cdots) \\ \text{同ジ } \bar{a}_2 & \text{〃} & \text{〃} & (\beta'_{21}, \beta'_{22}, \cdots\cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \text{同ジ } \bar{\bar{a}}_1 & \text{〃} & \text{〃} & (\beta''_{11}, \beta''_{12}, \cdots\cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \end{array}\right\} \text{トス。}$$

又 $0.d_1, 0.d_1d_2, \cdots\cdots$ ニ己ニ對應済トナレル無理數群 ($\beta_{d_1}, \beta_{d_2}, \beta_{d_3}, \cdots\cdots$) ヲトリテ ($\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots\cdots, \bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \cdots\cdots, 0.d_1, 0.d_1d_2, 0.d_1d_2d_3, \cdots\cdots$) ＝ ($\beta'_{11}, \beta'_{12}, \cdots\cdots$), ($\beta'_{21}, \beta'_{22}, \cdots\cdots$) $\cdots\cdots$, ($\beta''_{11}, \beta''_{12}, \cdots\cdots$), ($\cdots\cdots$), $\cdots\cdots$, 及 ($\beta_{d_1}, \beta_{d_2}, \cdots\cdots$) ナル無理數群ヲ(1.1)對應ナサシム。《可

附番集合ヲ作ルモノノミナル故、(1.1) 對應ハ可能ナリ》

（其他ノモノハ皆其ノマヽ對應セルナリ）

即チ (b) ノ時モ (a) ト同様ニナルナリ。

斯クシテ (a), (b) ノ何レノ場合ニテモ常ニ (N_1+n_1) ノ無理数集合ト有理数ノ集合トヲシテ (1.1) 對應ヲナサシメ得ルナリ。$(q.e.d.)$

コノ性質ヲ (V) ト名ヅク。

之等ノ規則 (I), (II), (III), (IV), (V) ニヨリ無理数ノ集合 N ト有理数ノ集合 R トハ (1.1) 對應ヲナサシメウルコトヲ証シ得。

（帰謬法ヲ用フ）

〔証〕

N が非可附番集合ナリシトセヨ。

今 R ノ元素ハ皆完全排列集合（wohl geordnete Menge）ニ排列シウル故 R ヲ出来得ル限リ多クノ「無限部分集合」ニ分割シテ逐次完全排列集合ヲ作リ行ケバ極限ハ $\longrightarrow \Omega$ トナル（Ω ハ第二 class ノ超限数ナリ）

從ツテ R ヲ如何ニ「無限部分集合」ニ分解スルモ N 中ニハ之レト対應セズニ残ル元素ヲ有ス。コノ一ツヲ γ トセヨ、然ラバ γ ハ今迄ノ無理数（即チ有理数ト対應セル無理数）中ニハナキ故必ズ又 $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots\cdots \longrightarrow \gamma)$, $(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \cdots\cdots \longrightarrow \gamma)$, $\cdots\cdots$ ヲ満足スル無数ノ無理数群 $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots\cdots)$, $(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \cdots\cdots)$, $\cdots\cdots$ モ N ノ残リノ中ニアルベシ。

從ツテ (V) ニヨリテ R ハ尚「無限部分集合」ニ分割シ

得ルコトトナル。結局無理數中ニRノ元素ト對應セズシテ殘ルモノノアル間ハ尚Rハ分割シウルコトトナリ。コレRハ已ニ完全ニ（出來得ル限リ）「部分集合」ニ分割シ終リタリトイフ假定ニ反ス。故ニ無理數ノ集合Nガ非可附番集合ヲ作ルコトハ不可ナリ。

Q.E.D.

（注意1）

勿論Rヲ分割スル方法ニハ終リナシ從ッテ其ノ實行ハ出來ヌモノナルガ、Rヲ出來得ル限リ分割シテ進メバ完全排列集合ヲ逐次得ラレ且ツコノ極限ハΩナル故、Rガ完全ニ分割シウル迄Rノ分割ハ続行シ得ラルヽモノナリト考ヘテ差支ナシ、實行上デナク思惟上ノコトナリ。